

文章编号: 1004-7182(2015)04-0084-06

DOI: 10.7654/j.issn.1004-7182.20150421

多维振动环境试验中的结构模态分析

吴家驹, 张鹏飞, 胡亚冰
(北京强度环境研究所, 北京, 100076)

摘要: 将导弹和振动台简化为两个子系统, 分别表示为非均匀梁和弹簧质量集中参数模型。利用子系统阻抗综合原理, 建立反映导弹多维振动环境试验的分析模型。给出所能提炼出的特征参数: 频响函数、传递率和响应互谱。选取模型的物理参数为战术导弹和振动台的典型值, 模拟飞行工况进行数值分析。通过均匀梁的两点激振试验, 表明基础激励模态估计的测量方便, 同样适用于有限元模型的修改; 基于频响函数分析的模态估计需要测量两个子系统的界面力, 使试验的难度大大增加; 工作模态的估计结果受激励点之间的相干影响较大。

关键词: 多维振动; 模态分析; 虚拟试验

中图分类号: V416 文献标识码: A

Modal Analysis of Structures in Multi-dimensional Environmental Testing

Wu Jia-ju, Zhang Peng-fei, Hu Ya-bing
(Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing, 100076)

Abstract: The missile and shaker are regarded as two subsystems and are expressed as non-uniform beam and lumped parameter model respectively. According to impedance synthesis principle, the analysis model is established to reflect the multi-dimensional environment test. Expressions of the frequency response function, transmissibility and cross-spectral are given. Physical parameters of the model are selected as typical values to simulate flight working mode and conduct numerical analysis. The two points excitation testing for uniform beam demonstrates the basic excitation modal is easy to measure and able to be applied to modify FEM. The mode estimation in view of frequency function analysis needs to measure the interface force, which enhance the complication of the testing. The operation mode estimation is sensitive to the interaction between excitation points.

Key Words: Multi-dimensional environmental; Modal analysis; Numerical analysis

0 引言

导弹振动环境试验的目的是鉴定结构的动强度或是考核设备的适应性。近年来, 多维振动试验已被用来模拟导弹的飞行使用环境^[1], 旨在提供导弹结构上和功能上承受能力的置信度。飞行环境的室内模拟方法分两类: 振源(力)模拟和响应(运动)模拟。振源模拟比较困难, 这是因为缺乏实测的外力数据, 而且试验室内测量和控制力参数需要专门的装置。目前的环境试验即使是单振动台试验都用振动加速度作为控制参数, 控制点或者选在导弹与振动台界面, 或者选在弹内关键仪器设备的安装部位。大多数试验条件都只规定了单个控制点的自功率谱密度, 几乎没有任何互谱信息; 同时自谱的形状较为简单, 在整个频段内就是几条折线, 例如梯形谱等。

导弹飞行过程中的主要振源是发动机的推力波动和气动噪声, 其能量在所关心的频带内均匀分布, 没有能量过于集中的频率。飞行遥测提供的信息表明导弹主要结构的响应反映出其自由-自由状态下的模态特征。这样, 室内试验正确模拟飞行环境的重要标志应当是导弹响应所反映的振动形态和频率接近飞行状态模态特征的程度。

因此, 人们希望在振动环境试验中估计试件的模态参数, 将故障和系统特征紧密结合。环境试验中的结构模态分析结果取决于从所能提供的激励和响应信息中提炼出的特征参数: 频响函数(运动响应/激励力)、传递率(运动响应/激励点运动)或互功率谱(运动响应之间)。基于频响函数的分析是传统的结构模态参数估计, 基于传递率的分析是所谓基础激励模态估计,

收稿日期: 2014-10-30

作者简介: 吴家驹(1939-), 男, 研究员, 研究方向为结构动力学和环境工程

而基于响应互谱的分析则是工作模态估计。除所选用的物理量以外，参数估计的结果会因所选择的激励点、输入点和参照点而改变。对于传统的单维激励的试验，这 3 种模态参数估计方法所得到的结果虽然不同，但却是唯一的；多维激励试验的效果如何还需要检验。

为了定性判断估计结果的差异，本文将导弹和振动台系统夹具分别表示成非均匀梁和集中弹簧质量参数模型这样两个子系统。利用子系统阻抗综合原理，形成一个反映整个试验系统的分析模型，并推导出力激励模态、运动激励模态和工作模态分析的频域表达式。然后设置这个模型的物理参数为导弹和振动台的典型值，进行模态分析和响应计算，即所谓虚拟试验。同时设计一个均匀梁的两点激振试验，从原理上证实本文所给出的算法，并用模拟飞行工况的结果说明多维振动环境试验中的各种结构模态分析方法的能力和局限性，旨在对多维振动环境试验的设计提供帮助。

1 试件和振动台系统建模

包含试件和振动台的整个试验系统是一个组合系统。将导弹看作一个子系统 A，振动台系统（含夹具）看作另一个子系统 B^[2]。根据这两个系统的特点，分别用梁型结构和弹簧质量集中参数系统表征，如图 1 所示。再利用阻抗综合原理，建立导弹和振动台系统的输入和输出关系。

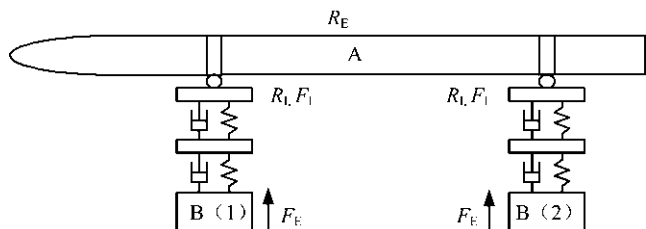


图 1 导弹振动环境试验系统示意

对于子系统 A，激励和响应关系在频域可写成：

$$\begin{Bmatrix} R_E^A(\omega) \\ R_l^A(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{EE}^A(\omega) & H_{El}^A(\omega) \\ H_{lE}^A(\omega) & H_{ll}^A(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_E^A(\omega) \\ F_l^A(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

对于子系统 B，激励和响应关系在频域可写成：

$$\begin{Bmatrix} R_E^B(\omega) \\ R_l^B(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{EE}^B(\omega) & H_{El}^B(\omega) \\ H_{lE}^B(\omega) & H_{ll}^B(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_E^B(\omega) \\ F_l^B(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中 下标 l 为与另一个结构连接的界面坐标； E 为非连接坐标； F 为激励； R 为响应； H 为频响； ω 为频率。当两个子系统连在一起时，连接处满足运动一致和力平衡的双协调条件。联立式 (1) 和式 (2)，消去界面力，得到组合系统频响与子结构频响的关系：

$$\begin{Bmatrix} R_A(\omega) \\ R_B(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{AA}(\omega) & H^{AB}(\omega) \\ H^{BA}(\omega) & H^{BB}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A(\omega) \\ F_B(\omega) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中，

$$H^{AA}(\omega) = H_{EE}^A(\omega) - H_{El}^A(\omega) \cdot [H_{ll}^A(\omega) + H_{ll}^B(\omega)]^{-1} \cdot H_{lE}^A(\omega)$$

$$H^{AB}(\omega) = H_{El}^A(\omega) \cdot [H_{ll}^A(\omega) + H_{ll}^B(\omega)]^{-1} \cdot H_{lE}^B(\omega)$$

$$H^{BA}(\omega) = H_{lE}^B(\omega) \cdot [H_{ll}^A(\omega) + H_{ll}^B(\omega)]^{-1} \cdot H_{El}^A(\omega)$$

$$H^{BB}(\omega) = H_{EE}^B(\omega) - H_{lE}^B(\omega) \cdot [H_{ll}^A(\omega) + H_{ll}^B(\omega)]^{-1} \cdot H_{lE}^B(\omega)$$

表达式中第 1 个下标表示响应位置，第 2 个下标表示激励位置。

随机振动环境试验时通常控制振动台和试验件界面的振动加速度谱密度矩阵，根据激励响应关系，反推出激励（控制仪输出电压、功率放大器电流或电动势）谱密度矩阵^[3]：

$$[G_{l,R}(\omega)] = [H_{lE}(\omega)] [G_{E,F}(\omega)] [H_{lE}(\omega)]^T \quad (4)$$

$$[G_{E,F}(\omega)] = [H_{lE}(\omega)]^{-1} [G_{l,R}(\omega)] ([H_{lE}(\omega)]^T)^{-1} \quad (5)$$

进而得到试验件上的响应谱密度矩阵：

$$[G_{E,R}^A(\omega)] = [H_{EE}^A(\omega)] [G_{E,F}(\omega)] [H_{EE}^A(\omega)]^T \quad (6)$$

2 试验模态分析

试验获取了各个物理量的时间历程后，按多输入多输出频域谱估计方法，提炼出各种特征参数如下：

a) 频响函数（试验件振动加速度/界面力或试验件振动加速度/电动势）：

$$[H_{El}^{RF}(\omega)] = [G_{El}^{RF}(\omega)] [G_{ll}^F(\omega)]^{-1} \quad (7)$$

b) 传递率（试验件振动加速度/界面振动加速度）：

$$[T_{El}^A(\omega)] = [G_{El}^R(\omega)] [G_{ll}^R(\omega)]^{-1} \quad (8)$$

c) 响应互谱（试验件振动加速度）：

$$G_{xy}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xy}(m) e^{-j\omega m} R_{xy}^*(m) = E\{x_{n+m} y_n^*\} = E\{x_n y_{n-m}^*\} \quad (9)$$

式中 x, y 为不同的响应点； m 为时延； n 为时间点。

2.1 力激励模态

式 (7) 表明，如果界面力可以测量，那么在环境试验中，也能获得试验件（导弹）的自由状态下的模态。

以两振动台激励， n 点响应的试验为例，通常情况下多维振动试验中振动台通过球头与试验件连接，球头只传递轴向力，于是试验件的输入输出关系有：

$$\begin{Bmatrix} R_1(\omega) \\ \vdots \\ R_n(\omega) \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} H_{1p}(\omega) & H_{1q}(\omega) \\ \vdots & \vdots \\ H_{np}(\omega) & H_{nq}(\omega) \end{bmatrix}_{n \times 2} \begin{Bmatrix} F_p(\omega) \\ F_q(\omega) \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \quad (10)$$

式中 p, q 为不同的外力作用点。

由于在环境试验中模拟了飞行量级,考虑到了量级非线性,此时获得的参数比传统方法更接近实际值。然而测量界面力非常麻烦,通常需要专门的力测量装置。倘若用控制仪输出电压、功率放大器电流或振动台的电动力作为激励形成频响函数,那么所得到的是包括了振动台系统影响的结果,与自由-自由状态下的参数相去甚远。

2.2 运动激励模态

将试验件与振动系统界面的加速度作为输入,考察响应加速度的传递情况。振动台通过球头后传递到试验件上的运动为沿球头轴向上的运动,试验件的输入输出关系有:

$$\begin{Bmatrix} R_1(\omega) \\ \vdots \\ R_n(\omega) \end{Bmatrix}_{n \times 1} = [T(\omega)]_{n \times 2} \begin{Bmatrix} R_p(\omega) \\ R_q(\omega) \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} F_p(\omega) \\ F_q(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{pp}(\omega) & H_{pq}(\omega) \\ H_{qp}(\omega) & H_{qq}(\omega) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} R_p(\omega) \\ R_q(\omega) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

联立式(10)~式(12),可得:

$$[T(\omega)]_{n \times 2} = \begin{bmatrix} H_{1p}(\omega) & H_{1q}(\omega) \\ \vdots & \vdots \\ H_{np}(\omega) & H_{nq}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{pp}(\omega) & H_{pq}(\omega) \\ H_{qp}(\omega) & H_{qq}(\omega) \end{bmatrix}_{2 \times 2}^{-1} \quad (13)$$

式中 T 为传递率。

由式(13)可以看出,传递率矩阵是频响函数矩阵乘以驱动(激励)点阻抗矩阵。从传递率矩阵和频响函数矩阵所识别出的模态参数完全不同,前者相当于试验件在运动激励点受约束时(简支)的动力学特征,后者则是试验件(导弹)在自由-自由状态下的动力学特征。此外,传递率矩阵的元素是无量纲数,通常不能据此识别出物理参数^[4,5]。传递率矩阵按下式估计:

$$[T(\omega)]_{n \times 2} = [G_{yx}(\omega)]_{n \times 2} \cdot [G_{xx}(\omega)]_{2 \times 2}^{-1} \quad (14)$$

式中 y 为响应点; x 为激励点。

2.3 工作模态

工作模态分析指的是根据试验件工作时所记录的运动响应,识别出系统的模态参数。如果激励(力)谱是“白”的或者在谐振频率附近是“平坦”的,那么对于单激励情况,响应谱矩阵的一行或一列,即各响应点相对于固定参照点的互谱和频响函数成比例^[6]。

$$X_i(\omega) = H_{ri}(\omega) \cdot C_r \quad i=1,2,\dots,n \quad (15)$$

$$G_{ir}(\omega) = H_{ri}^*(\omega) \cdot |C_r|^2 \cdot H_{ri}(\omega) \quad i=1,2,\dots,n \quad (16)$$

式中 C_r 为力谱; r 为参照点。应当指出,式(16)的右端频响函数已被加权,严格说来,即使力谱是“白”的,振型和阻尼比甚至频率的识别结果都要受到影响。

对于多输入情况,激励力已经不能用一个参数 C_r 表征。以两点激励为例,有:

$$G_{xx}(\omega) = H_{xp}^*(\omega) \cdot [H_{rp}(\omega) \cdot G_{pp}^f(\omega) + H_{rq}(\omega) \cdot G_{pq}^f(\omega)] + H_{xq}^*(\omega) \cdot [H_{rq}(\omega) \cdot G_{qq}^f(\omega) + H_{rp}(\omega) \cdot G_{qp}^f(\omega)] \quad (17)$$

由式(17)可知,即使激励均为“白”谱,激励量级比、相干相位和互谱参照点都会影响模态识别结果。因为权函数不同,所以工作模态分析给不出唯一的结果。

2.4 讨论

传统的试验模态分析都是基于激励力和运动响应信息,而工作模态分析和基础运动激励模态分析仅依靠运动响应信息。如用互谱矩阵做工作模态分析,且参照点取在试件与振动系统界面,那么这两种基于运动响应的模态分析方法给出的谐振频率相同。仍以两点激励为例,界面运动激励下的试件响应互谱矩阵为

$$[G_{yx}(\omega)]_{n \times 2} = [T(\omega)]_{n \times 2} [G_{xx}(\omega)]_{2 \times 2} \quad (18)$$

结果与式(14)相同,取其中一列即可识别模态参数。注意到,在振动环境试验中,只有界面运动而不是界面力能满足“平”谱假设,因此工作模态分析不可能得到导弹自由-自由状态下的模态;倒是参照点与激励点重合,运动激励为“白”谱时有可能得到试验件在参照点被约束状态下的模态。

3 虚拟试验

将图1所示的物理模型中的物理参数选取为战术导弹和振动台的典型值,进行多维振动环境下的模态分析和响应计算,即进行虚拟试验,结果见表1和图2。两激振点同时施加“白”谱电动力,模拟导弹的飞行工况,按第2节给出的公式进行模态分析。表1给出了导弹的自由和简支边界计算的前三阶模态频率和虚拟试验分析的相应频率,图2示出了相应的振型,图中标出了振动台与试验件的连接点,纵轴为归一化后的模态振型值。

表1 导弹前三阶模态频率的计算值和虚拟试验分析值

模态	一阶频率/Hz	二阶频率/Hz	三阶频率/Hz
虚拟试验(计算)			
面力激励(自由)	28.50(28.61)	63.75(63.73)	112.00(112.01)
基础激励(简支)	26.50(26.48)	51.50(51.42)	94.75(94.78)
工作模态(系统)	28.25(28.61)	61.25/(61.20)	108.75(108.80)

由表1可以看出,虚拟试验中力激励模态与自由边界的计算模态相同,基础激励模态与简支边界的计

算模态相同，工作模态频率与试件和振动台组合系统的模态频率相同，其微小差别源自计算误差。然而，无论是谐振频率还是振型，3种试验模态分析方法给出的结果都不相同，其根本原因是每种分析方法所隐含的边界条件假设不同。由于边界条件不同（自由和简支），故容易理解界面力激励和基础运动激励的模态有较大差别。而工作模态和界面力激励的模态分析结果看上去比较接近，但不能归结为计算误差，因为虚拟试验没有加入噪声，所以其差别应当是子系统和组合系统的差别。当激励子系统的附加质量比导弹的质量小很多时两者结果才比较接近。

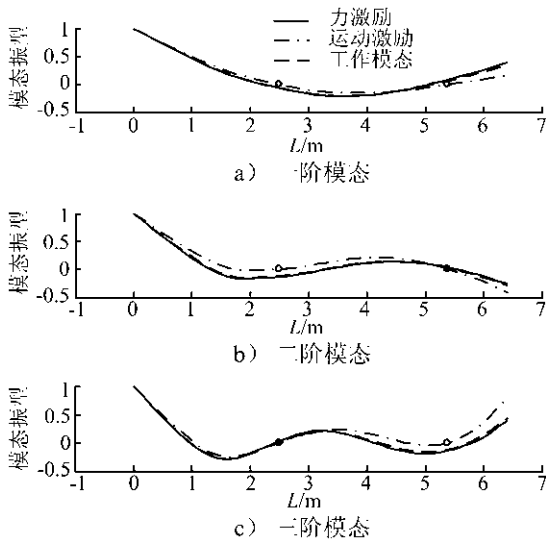


图2 虚拟试验分析的导弹前3阶模态振型

试验时只要振动台与导弹的相对位置固定，试验控制2个电动力为“白”噪声，工作模态频率不会变化。虽然如此，控制点的量级、相干特性和互谱参照点对振型影响很大。

图3~5分别给出了控制点的量级、相干特性和互谱参照点的几种典型配置时的振型。从图3~5中可以看出，即使控制谱被设置成“白”谱，工作模态振型受其它控制参数的影响非常明显。这说明在多维激励时，采用单参照点的互谱识别模态的方法，不能得到确定的结果。

不失一般性，仿真时用“白”谱电动力作为激励源，但在实践中很多是控制界面运动为平直谱。按工作模态的定义，上面讨论的相干、量级和参照点对振型也就是应力状态的影响趋势不会因此而改变。只不过是工作模态的主频为试件简支状态下的固有频率，而不是试件振动台组合系统的固有频率^[7, 8]。

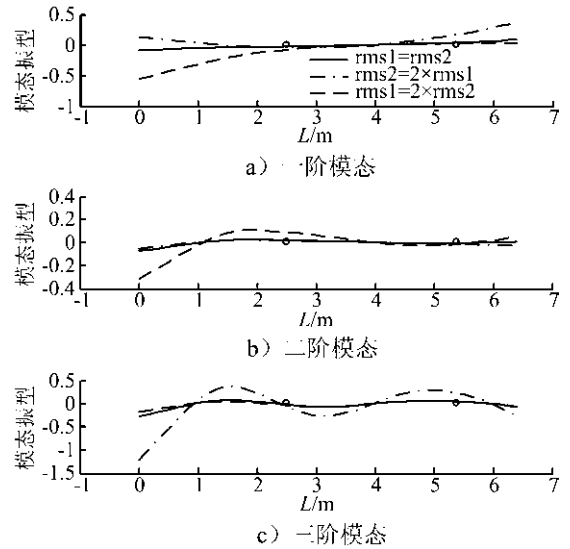


图3 工作模态振型(均方根)随激励量级的变化

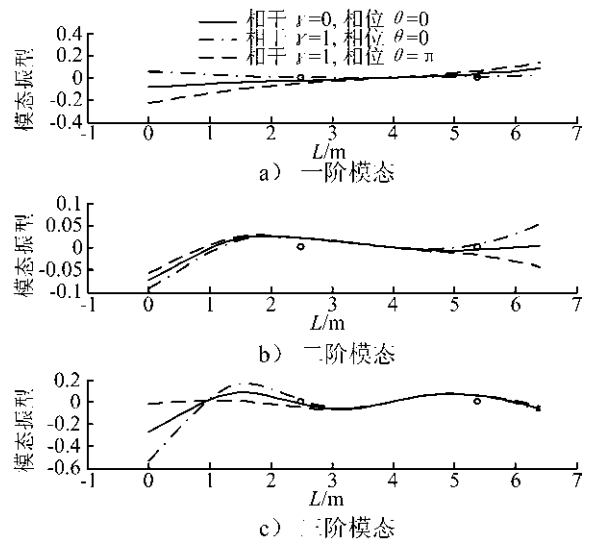


图4 工作模态振型随激励间相干参数的变化

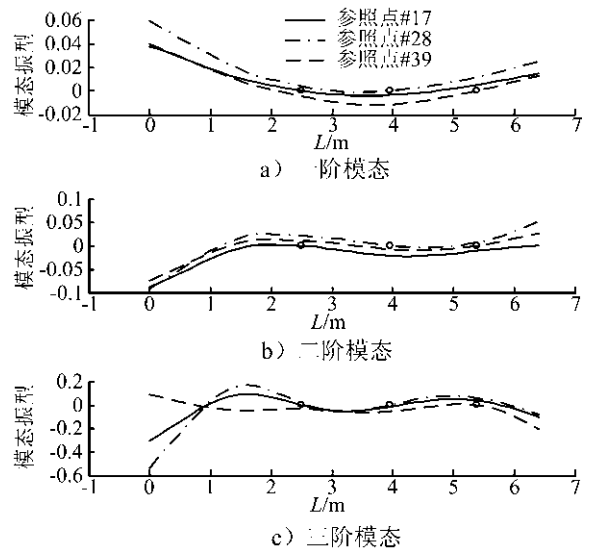


图5 工作模态振型随互谱参照点的变化

4 均匀梁试验

为在原理上证实上述分析结果，设计了一个简单的多维振动试验。试件为长方形截面的铝质均匀梁，梁长 200 cm，截面宽 3 cm，高 2 cm，在距一端 60 cm 和 160 cm 处激励。激振器通过激振杆与梁连接，激振杆与梁之间串连力传感器，梁上均布 11 个加速度传感器。试验使用 2 个激振点处的加速度传感器进行反馈控制，如图 6 所示。界面加速度均被设置成平直谱，控制点之间一共设计了 3 种相干状态：独立、全相干同相和全相干反相。试验时同时测量加速度和激励力。按第 2 节所推导的方法进行了模态分析。

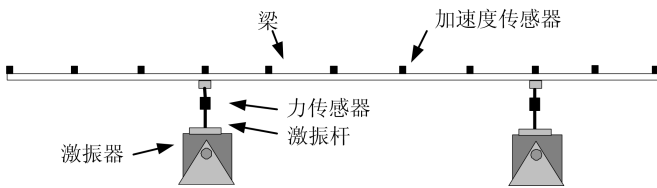


图 6 均匀梁试验装置示意

表 2 列出了梁的自由-自由边界和两点简支边界的前三阶模态频率的计算值和试验值。试验值是 3 种相干工况结果的均值，相对标准差反映试验的分散性，表 2 中最后一行的误差项则反映试验边界与理想情况的偏差。

表 2 两种边界下均匀梁的模态频率

边界条件	自由			简支		
	一	二	三	一	二	三
阶次	—	—	—	—	—	—
频率计算值/Hz	24.96	68.75	134.67	21.81	44.83	89.45
试验均值/Hz	25.19	66.55	135.97	21.74	46.41	92.44
相对标准差	2.47%	1.44%	0.81%	0.66%	0.12%	0.15%
误差	0.92%	3.20%	0.97%	0.32%	3.52%	3.34%

图 7 和图 8 分别给出自由边界和两点约束边界的计算和随机试验振型（图 7、图 8 线型定义相同）。总

体上看，计算和试验一致性很好，说明给出的算法正确。误差主要来源于传感器质量和激励点简支程度的影响。

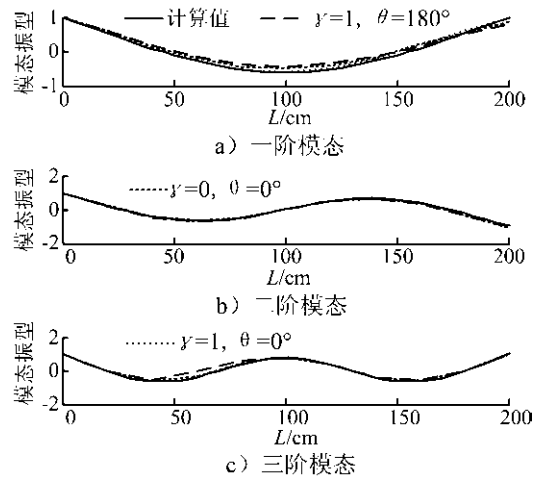


图 7 自由边界的计算和随机试验振型

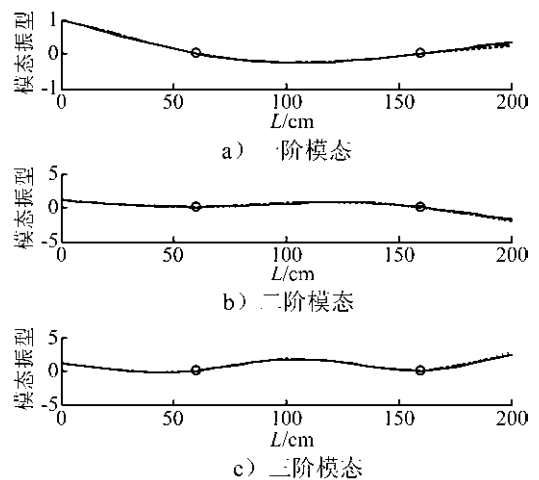


图 8 简支边界的计算和随机试验振型

表 3 列出了工作模态频率随激励之间的相干和互谱参照点的变化。由表 3 可以看出，工作模态频率与梁的简支边界的固有频率一致，这是试验控制试件与激振器界面加速度为平直谱的结果。

表 3 工作模态频率随激励之间的相干和互谱参照点的变化

阶次	简支计算值 Hz	试验值（相干相位改变）			试验值（参照点改变）		
		均值/Hz	标准差	误差	均值/Hz	标准差	误差
一	21.81	22.45	3.34%	2.93%	23.42	0.75%	7.38%
二	44.83	45.60	1.59%	1.72%	45.84	0.19%	2.25%
三	89.45	90.87	1.75%	1.59%	91.06	0.46%	1.80%

图 9 和图 10 分别给出工作模态的振型随激励之间

的相干和互谱参照点的变化（图 9 与图 7 线型定义相

同)。

工作模态的振型不同于梁的简支边界振型，并且随激励之间的相干和互谱参照点的改变而改变。因此，在多维振动环境试验中，不推荐使用工作模态分析方法获得的振型。另外，试验中没有涉及阻尼比的分析，这是因为阻尼比的试验识别误差大，要获得确定的比较结果还需要将试验做得更精细。

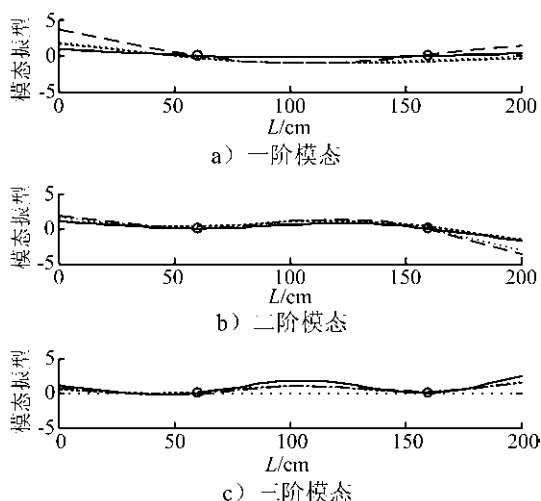


图 9 工作模态的振型随激励之间的相干的变化

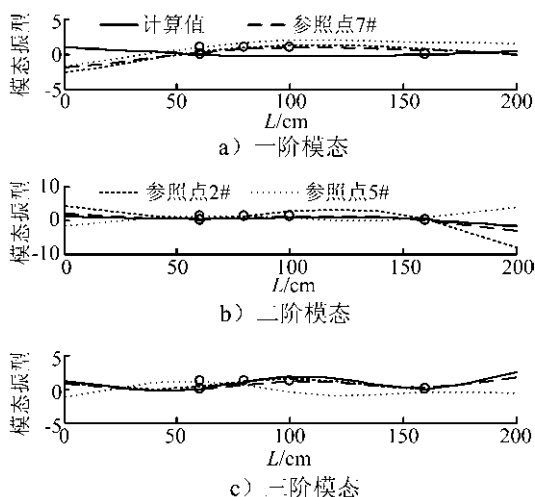


图 10 工作模态的振型随互谱参照点的变化

5 结 论

导弹的振动环境试验的主要目的是考核弹体的结构强度和弹上仪器设备的环境适应性，其试验量级达到或超过飞行使用量级。如果能在环境试验中提取模态参数用于检查结构强度特征和修改数学模型，就有可能在研制进度和经费上获得较大的利益。这种设想

在单维振动环境试验中实现起来困难不大，但是在多维振动环境试验中实现是一个挑战。本文研究了多维振动环境试验中的力激励、运动激励和工作模态分析方法，证实其结果的差异。从虚拟试验结果得出一些重要结论有助于多维振动环境试验（包括车载导弹机动运输试验）的设计和实施的：

a) 振动环境试验中只要测量了导弹与振动台之间的界面力，原则上就能得到飞行工况的模态参数，其精度取决于界面自由度的选择。然而，界面力的测量非常麻烦，通常情况下不是合算的选择。

b) 仅仅依靠振动环境试验的运动信息也能进行模态分析，结果的唯一性使其能应用于模型修改。虽然无法取得物理参数，而且所得到的模态与飞行自由边界的模态不同，但由于其较大的激励力消除了结构组件的连接间隙，使得修改后的计算模型更接近真实状态。

c) 工作模态分析的结果受参照点、激励量级和相干相位等参数的选择与控制影响严重，使之不具有唯一性。在多维振动试验中激励点是已知的，如果采用以基础激励点为参照点和传递矩阵算法，那么工作模态的分析结果与基础激励模态分析结果相同，且无需假设运动激励为“白”谱。

参 考 文 献

- [1] Department of Defence of the USA. MIL-STD-810G Method 527, Multi-exciter testing[S]. 2008-10-31.
- [2] 吴家驹, 张宇光. 基于实测频响函数的子结构模态综合[J]. 应用力学学报, 1992, 9(3): 36-43.
- [3] 吴家驹, 苏华昌, 王晓晖. 基础激励结构的试验模态分析[J]. 强度与环境, 2010, 37(4): 28-35.
- [4] 吴家驹. 多维振动环境试验控制策略的分析基础[J]. 强度与环境, 2008, 35(4): 1-6.
- [5] Vigneron F R, Soucy Y. Driven-base tests for modal parameter estimation[J]. AIAA Journal, 1987, 25(1):152-160.
- [6] Mark R, Brian S. Modal parameter estimation from operating data[J]. Sound and Vibration, 2003, 37(1): 28-36.
- [7] Smallwood D O. Characterizing electro-dynamic shakers[J]. Proceedings of PIES, 1997: 28-36.
- [8] Zhang J G, Yue Z Y, Xiang S H. Application of force-limited controlled method in vibration testing of the satellite[C]. Krakow: 16th International Congress on Sound and Vibration, 2009: 4916-4923.